

Een oceaan vol plastic

Stromingen wiskundig modelleren

Werkbundel

Klasdiscussie:

Waarschijnlijk kennen jullie Boyan Slat wel, de jonge Nederlandse uitvinder die met zijn project The Ocean Cleanup 90 % van het drijvend plastic in de oceaan wil opruimen. Zijn systeem bestaat uit 1 tot 2 kilometer lange drijvende buizen waaronder netten hangen.

Misschien vraag je je wel af waar hij die installaties in de oceaan plaatst? Op een willekeurige plaats? Vast niet! Denk hierover na in groepjes.



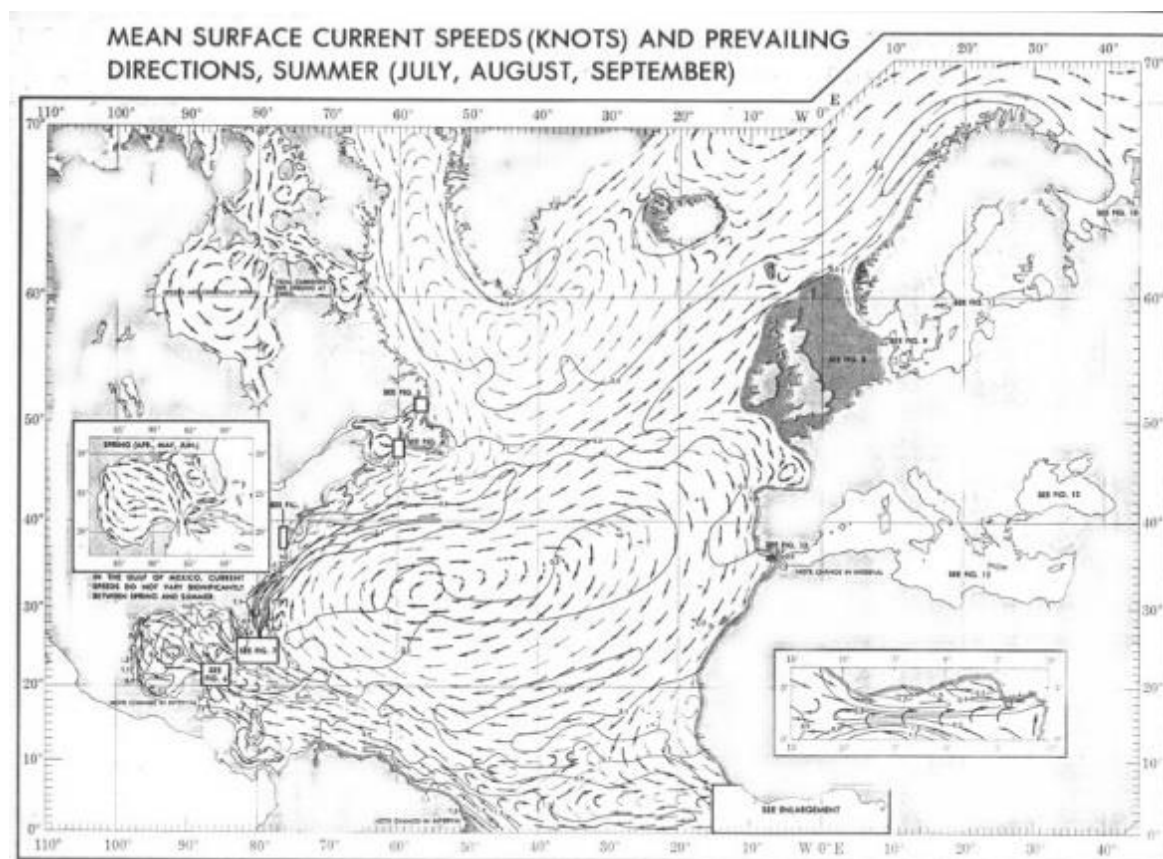
Figuur 1: Boyan Slat. © The Ocean Cleanup.

In deze opdracht onderzoeken jullie hoe we stromingen wiskundig kunnen modelleren en hoe deze modellen kunnen voorspellen waar het plastic afval zich zal opstapelen.

Materiaal:

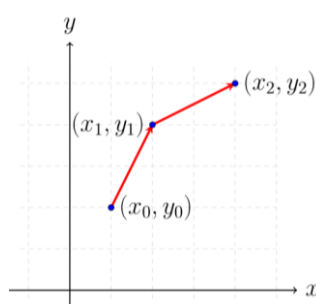
Stromingskaart van het Noordelijk deel van de Atlantische Oceaan.

Pijltjes duiden de stromingen aan (richting en snelheid). Hoe langer de pijl, hoe sterker de stroming.



Procedure:

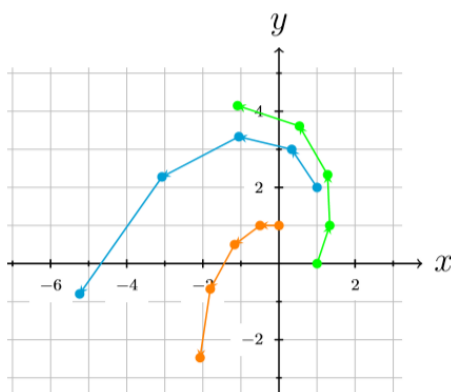
Allereerst moet je een **stromingskaart leren interpreteren**. Wat betekent een pijl op een stromingskaart eigenlijk? Als een pijl start in een punt (x_0, y_0) (van het oceaanklak, uitgerust met een orthonormale basis) en eindigt in punt (x_1, y_1) , betekent dit dat een plasticdeeltje dat zich op een zeker tijdstip in het punt (x_0, y_0) bevindt, zich 1 tijdseenheid later (bijvoorbeeld een uur later) in het punt (x_1, y_1) zal bevinden. Als we dan de stroming in (x_1, y_1) kennen, weten we waar het plasticdeeltje zich tijdens de volgende tijdseenheid naartoe zal verplaatsen. Dat zal een punt (x_2, y_2) opleveren.



In het model dat we hier beschouwen, veronderstellen we dat de stroming in elk punt van het vlak gekend is en dat we van elk plasticdeeltje via een **stelsel van lineaire vergelijkingen** kunnen zeggen waar het zich na 1 tijdseenheid zal bevinden, in functie van de beginplaats (x_n, y_n) van het deeltje. We noteren de nieuwe plaats van het deeltje (x_{n+1}, y_{n+1}) . Bijvoorbeeld:

$$(M) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

Door het stelsel (M) meerdere malen toe te passen, kunnen we de evolutie of de **baan van een plasticdeeltje bepalen**. Veronderstel bijvoorbeeld dat een deeltje zich in beginpositie $(x_0, y_0) = (1, 2)$ bevindt. Dan zal het zich na 1 tijdseenheid in het punt $(x_1, y_1) = (\frac{1}{3}, 3)$ bevinden. Nog een tijdseenheid later in $(x_2, y_2) = (-\frac{19}{18}, \frac{10}{3})$. De baan (over vier tijdseenheden) van het punt $(1, 2)$ is op onderstaande figuur in het blauw afgebeeld. In het groen en het oranje zijn banen afgebeeld voor twee andere punten. Het is duidelijk dat het model (M) plasticdeeltjes in een spiraalbeweging van de oorsprong wegstuurt.



Nu jullie de basis begrijpen, gaan we over tot het echte werk: drie verschillende opdrachten die aan elkaar gelinkt zijn.

Opdracht 1:

Gegeven zijn de modellen (M_1) t.e.m. (M_4) . Bepaal de banen van enkele punten (minstens 5 verschillende punten, hoogstens 2 per kwadrant, minstens 5 iteraties). Stel ze grafisch voor. Vergelijk de vier modellen en noteer je vaststellingen. Wat gebeurt er met de plasticdeeltjes?

$$(M_1) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_3) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n + y_n \end{cases}$$

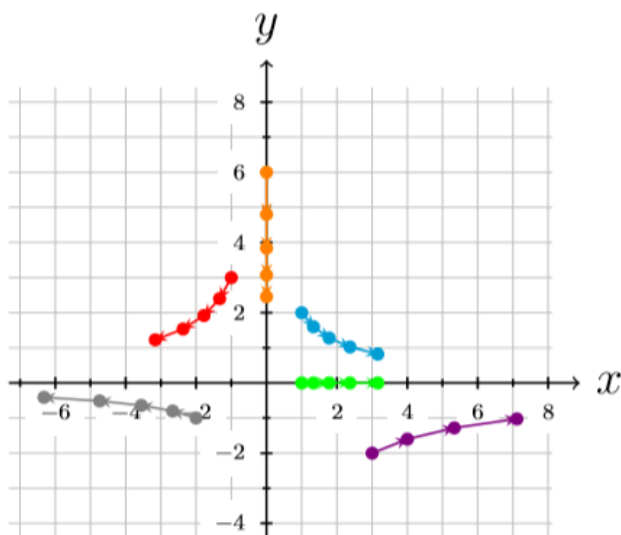
$$(M_4) \begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n \end{cases}$$

Opdracht 2:

We bekijken terug het model:

$$(M_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

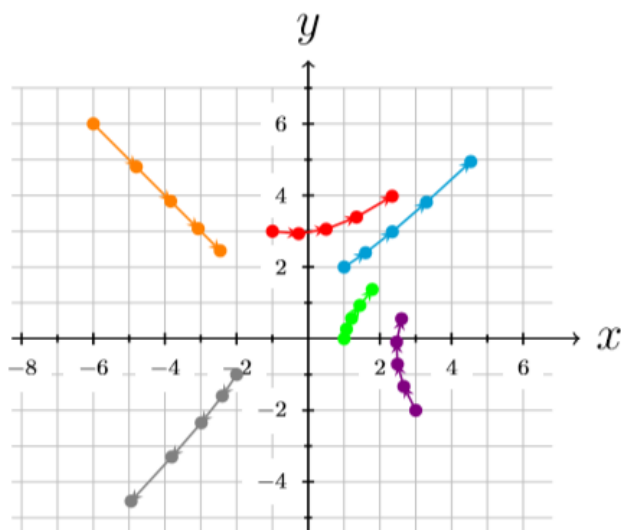
De evolutie van dit model is makkelijk te voorspellen omdat voor elk punt (x_0, y_0) bij elke tijdseenheid de x-coördinaat vermenigvuldigd wordt met $\frac{4}{3}$ en de y-coördinaat met $\frac{4}{5}$. Of met andere woorden: de x-coördinaat wordt groter (want $a > 1$) en de y-coördinaat krimpt (want $a < 1$). Nemen we dus een punt op de y-as, dan zal de baan op de y-as blijven en naar het punt $(0, 0)$ convergeren. Een punt op de x-as (zonder $(0, 0)$) daarentegen zal verdwijnen naar oneindig. Voor punten die niet op de assen liggen, worden beide effecten gecombineerd en zien we banen volgens hyperbooltakken. Dit zie je op onderstaande figuur.



Het model

$$(M'_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{16}{15}x_n + \frac{4}{15}y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{15}x_n + \frac{16}{15}y_n \end{cases}$$

is hieronder afgebeeld en vertoont gelijkaardige eigenschappen met model (M_2) maar de 'assen' liggen anders. We zien dus grafisch gelijkenissen tussen M_2 en M'_2 .



De twee factoren ($\frac{4}{3}$ en $\frac{4}{5}$) die we in (M_2) zagen, zijn ook aanwezig in (M'_2) maar 'verborgen'. De som van de coëfficiënten van x_n in de eerste vergelijking en y_n in de tweede vergelijking van stelsel (M_2) is

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{32}{15}.$$

Als je hetzelfde doet voor (M'_2) , vind je merkwaardig genoeg dezelfde som terug:

$$\frac{16}{15} + \frac{16}{15} = \frac{32}{15}.$$

Het product van de twee factoren, $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, kan je ook terugvinden in de coëfficiënten van (M'_2) .

Daarvoor bereken je eerst het product van de coëfficiënt van x_n in de eerste vergelijking en de coëfficiënt van y_n in de tweede vergelijking en daarvan trek je het product van de twee andere coëfficiënten af: $\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} - \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{15}$.

In het algemeen vinden we voor een model

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + By_n \\ y_{n+1} = Cx_n + Dy_n \end{cases}$$

$A + D$ is gelijk aan de som van de twee factoren. $AD - BC$ is gelijk aan hun product.

Nu je dit voorbeeld begrijpt, kan je aan de slag met volgende abstracte vraag:

Per model kan je twee unieke getallen maken: f_1 en f_2 , die volledig vast liggen door hun som en product.

Als je de som en het product van twee reële getallen kent, hoe kan je dan deze getallen terugvinden?

Leg uit.

Nu gaan we opnieuw aan de slag met de modellen om de evolutie ervan te verklaren en zo te voorspellen waar de plasticdeeltjes naartoe zullen drijven.

Opdracht 3:

Deel 1. We bekijken opnieuw vier voorgaande modellen:

$$(M_1) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_3) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n + y_n \end{cases}$$

$$(M_4) \begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n \end{cases}$$

Bereken de factoren van deze vier modellen. We noemen de twee factoren van een gegeven model f_1 en f_2 en zorgen ervoor dat $f_1 \leq f_2$. Plaats deze vier modellen vervolgens in onderstaande tabel.

Besprek a.d.h.v. de eerder uitgetekende grafische voorstellen (zie opdracht 1) de evolutie van deze modellen.

f_1 en f_2	Evolutie van het model
$0 < f_1 \leq f_2 < 1$	
$0 < f_1 \leq f_2 = 1$	
$-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$	
$1 < f_1 \leq f_2$	Gegeven: Alle punten gaan naar oneindig.
$f_1 < 1$ en $f_2 > 1$	
f_1 en f_2 bestaan niet (in $\mathbb{R}$)	

Deel 2. Ga nu zelf aan de slag met het maken van een model voor de ontbrekende lijnen in de tabel.

Modellen M_1 t.e.m. M_4 konden we in drie lijnen van het classificatiesysteem plaatsen. Wanneer je een stelsel krijgt met lineaire vergelijkingen waarvan f_1 en f_2 aan die bepaalde voorwaarden voldoen, kan je meteen voorspellen hoe de plasticdeeltjes zullen drijven.

We kunnen echter nog niks zeggen over de evolutie van plasticdeeltjes bij stelsels met waarden van f_1 en f_2 indien $0 < f_1 \leq f_2 = 1$ en indien $-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$. Hiervoor stellen we zelf stelsels op, we stellen dus zelf modellen M_5 en M_6 op.

f_1 en f_2	Evolutie van het model
$0 < f_1 \leq f_2 < 1$	
$0 < f_1 \leq f_2 = 1$	
$-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$	
$1 < f_1 \leq f_2$	Gegeven: Alle punten gaan naar oneindig.
$f_1 < 1$ en $f_2 > 1$	
f_1 en f_2 bestaan niet (in $\mathbb{R}$)	

Reflectie:

We zagen dat wiskundige modellen toelaten om te voorspellen waar plasticdeeltjes naartoe zullen drijven. Stromingen zijn uiteraard complex en hangen af van seizoenen, wind, zoutgehalte, ... Bij welk van bovenstaande modellen zou het systeem van Boyan Slat werken?

Bovenstaande opdrachten werden ontwikkeld binnen de 'Wiskunnend Wiske Wedstrijd' en werden in de finale voorgeschoteld aan knappe wiskundekoppen.

Vijfde- en zesdejaars uit het secundair onderwijs kunnen jaarlijks deelnemen. Ze krijgen geen klassieke vraagstukken met gegevens en formules voorgeschoteld, maar uitdagende open vragen. Wie zei dat wiskunde saai was? In een voorronde lost een klas drie opdrachten binnen een bepaalde tijdsduur op. De klassen die de beste resultaten halen, strijden tegen elkaar in een finale op (hoe kon het ook anders) pi-dag aan de VUB.

Prof. Ingrid Daubechies is de bedenker van de wedstrijd en werkt hiervoor samen met prof. Ann Dooms en dr. Pattie Maes.

Lees meer: <https://www.vub.be/events/wiskunnend-wiske>

Deze opdracht werd verder uitgeschreven met de hulp van wiskundeleerkrachten Karel Van Parys en Liselot Bouserie (Sint-Lodewijkcollege, Brugge).